I

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

Todo lo que se puede conocer tiene un número. Sin el número no conocemos ni comprendemos nada.

Filolao (pitagórico, siglo v a.C.)

Toma lo que hace falta, opera como debes y obtendrás lo que deseas.

Leibniz (1646-1716)

NOTAS HISTÓRICAS. ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

Con el comienzo de la agricultura, surgen problemas como contar las estaciones, calcular superficies de terrenos, etc. Esto hizo preciso dar nombre a los números y contar más allá de "uno" y "muchos". Al contar, se descubrieron relaciones entre los números y se establecieron gradualmente ciertas leyes generales que permiten y facilitan el cálculo (aritmética significa "arte de calcular").

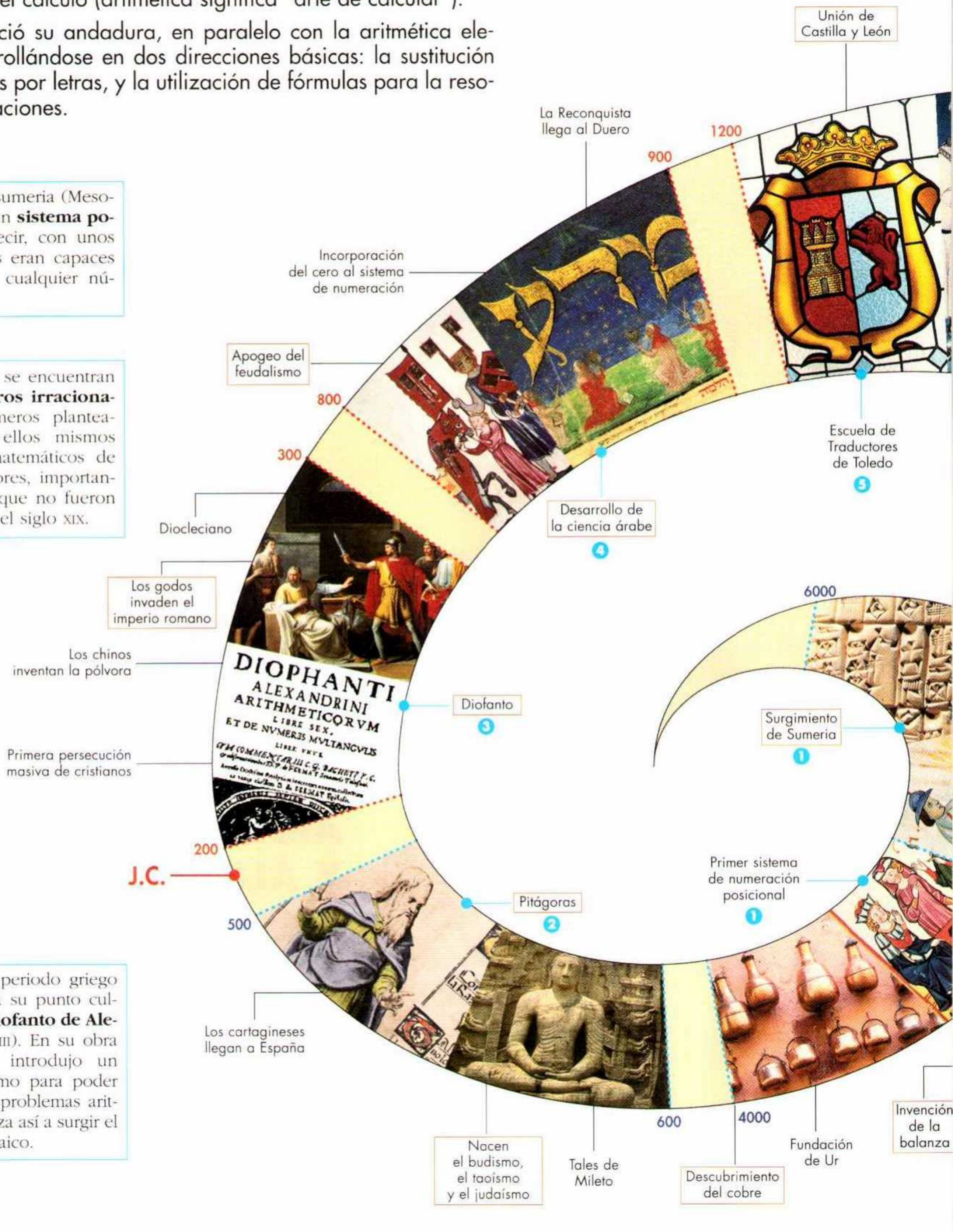
El álgebra inició su andadura, en paralelo con la aritmética elemental, desarrollándose en dos direcciones básicas: la sustitución de los números por letras, y la utilización de fórmulas para la resolución de ecuaciones.

1

La civilización sumeria (Mesopotamia) idea un **sistema posicional**, es decir, con unos pocos símbolos eran capaces de representar cualquier número.

2

Los pitagóricos se encuentran con los **números irracionales**. Estos números plantearon, tanto a ellos mismos como a los matemáticos de épocas posteriores, importantes problemas que no fueron resueltos hasta el siglo XIX.

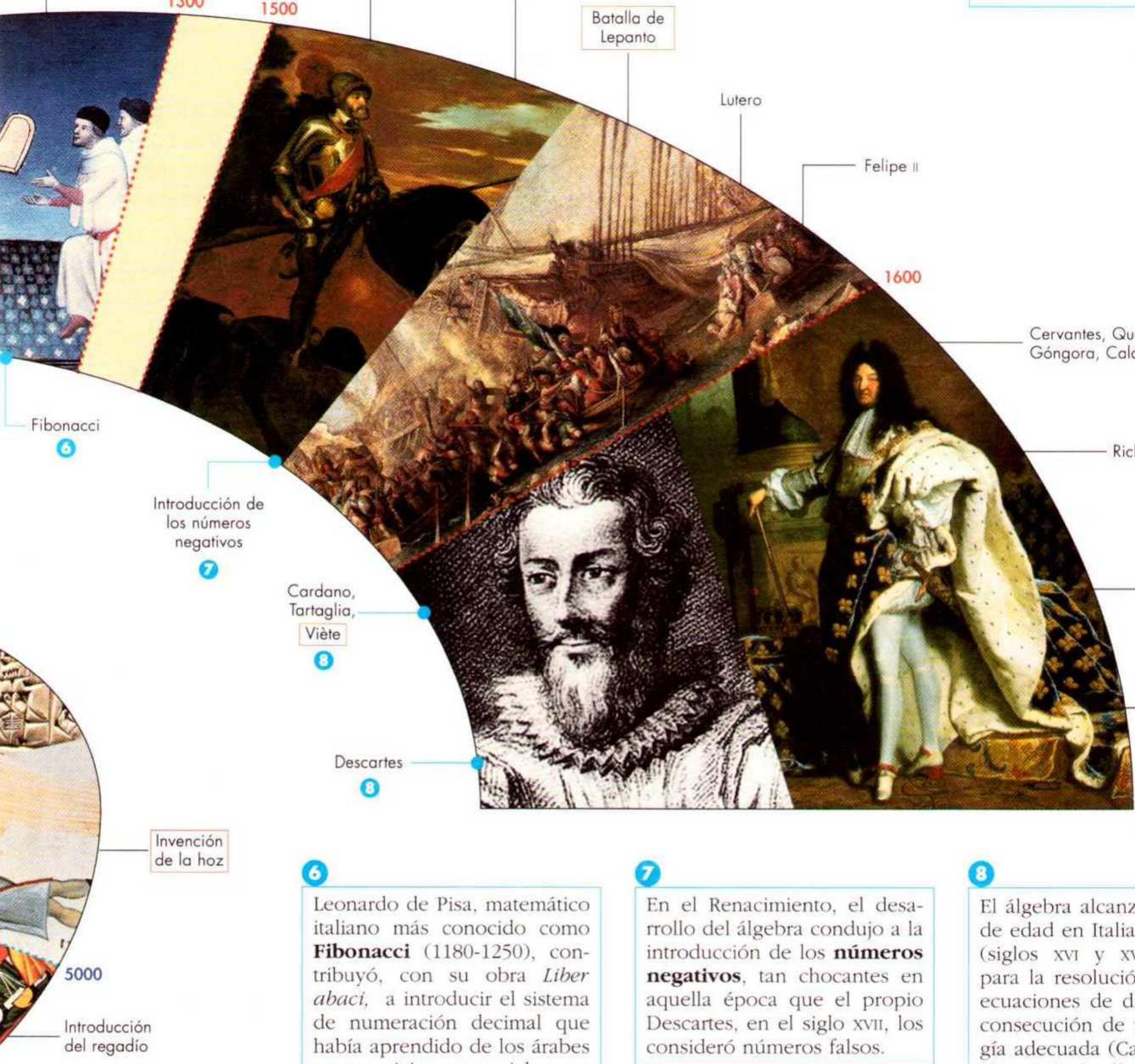


3

El álgebra del periodo griego antiguo alcanza su punto culminante con **Diofanto de Alejandría** (siglo III). En su obra *La Aritmética* introdujo un cierto simbolismo para poder domesticar los problemas aritméticos. Empieza así a surgir el lenguaje algebraico.

4 Surge el álgebra propiamente dicha de mano de los árabes (siglo IX).

5 En la **Escuela de Traductores de Toledo** se traducen todas las grandes obras de la ciencia árabe al latín. Esto permite introducir en Europa su álgebra, su sistema de numeración decimal (proveniente de la India y usado actualmente), etc.



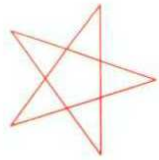
6 Leonardo de Pisa, matemático italiano más conocido como **Fibonacci** (1180-1250), contribuyó, con su obra *Liber abaci*, a introducir el sistema de numeración decimal que había aprendido de los árabes en sus viajes comerciales por el norte de África.

7 En el Renacimiento, el desarrollo del álgebra condujo a la introducción de los **números negativos**, tan chocantes en aquella época que el propio Descartes, en el siglo XVII, los consideró números falsos.

8 El álgebra alcanza su mayoría de edad en Italia y en Francia (siglos XVI y XVII): métodos para la resolución general de ecuaciones de distintos tipos, consecución de una simbología adecuada (Cardano, Tartaglia, Viète), llegando a su punto culminante con Descartes (siglo XVII).

En tu CD tienes algunas **notas históricas** correspondientes a este bloque y una lectura sobre **Aritmética electoral: votos y escaños**. También puedes leer algunas **biografías** de insignes matemáticos.

1 NÚMEROS REALES



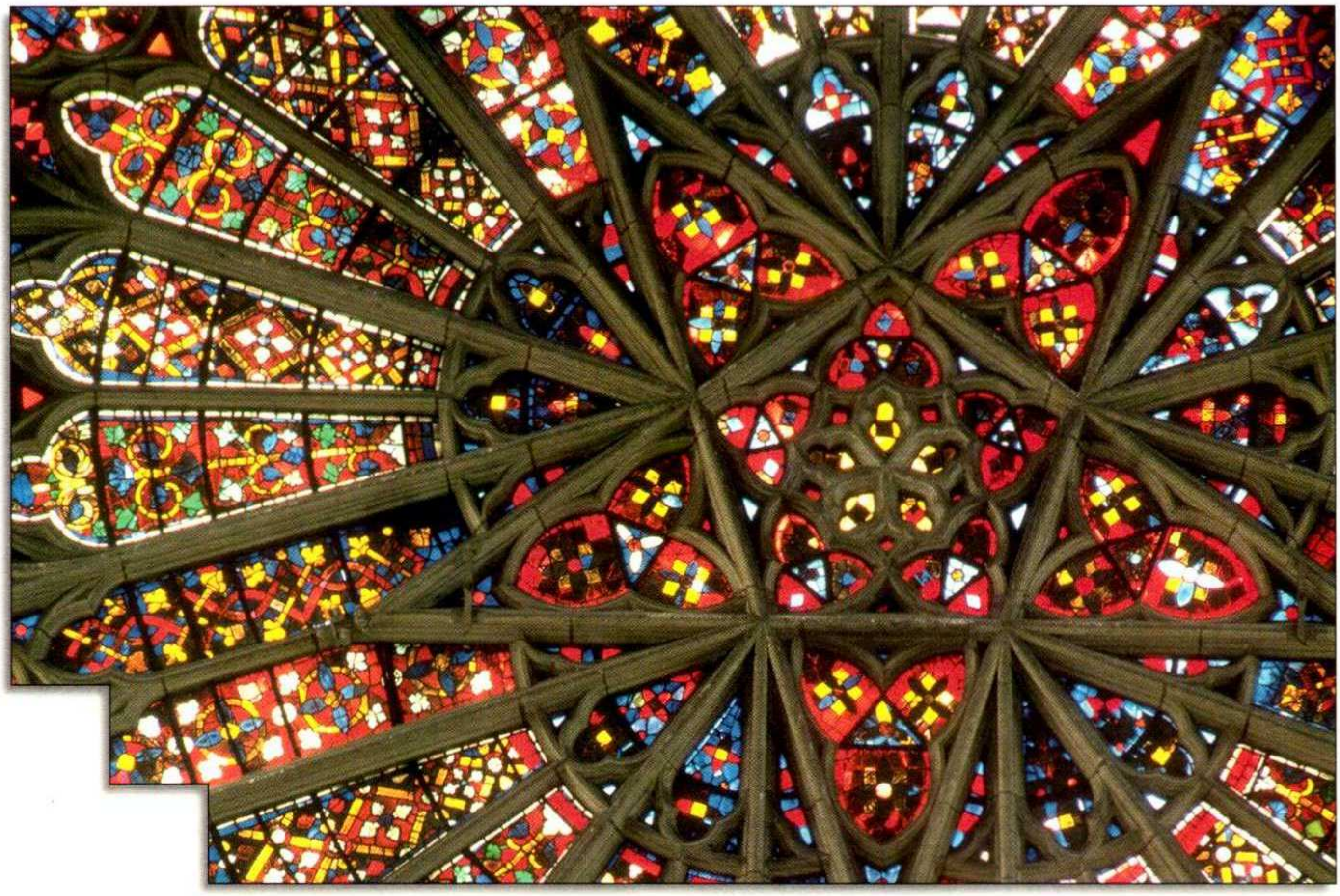
Los griegos pitagóricos (siglo V a.C.) creían que todo el universo se regía por los números naturales y sus relaciones (fracciones). Formaban una especie de secta místico-matemática, cuyo símbolo era la estrella de cinco puntas (pentágono estrellado).

Pues bien, cuando los pitagóricos descubrieron que la relación que existe entre el lado del pentágono estrellado y el lado del correspondiente pentágono convexo no se puede expresar como cociente de dos números naturales, sufrieron una enorme conmoción en sus creencias.

Tan contraria a toda lógica les pareció la existencia de una relación así, que al número correspondiente lo consideraron *irracional* (contrario a la razón).

Han pasado veinticinco siglos desde entonces. Actualmente los *irracionales* son números tan *razonables* que, junto con los racionales, forman el llamado conjunto de los **números reales**.

Vidrieras de la catedral de Notre-Dame de Amiens, Francia



REFLEXIONA Y RESUELVE

El paso de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$

Imaginemos que solo se conocieran los **números enteros**, $\mathbb{Z}$. Sin utilizar otro tipo de números, intenta resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3x = 15$

b) $-2x = 18$

c) $11x = -341$

d) $4x = 34$

Las tres primeras se pueden resolver en $\mathbb{Z}$, pues sus soluciones son números enteros.

Para poder resolver la cuarta, necesitamos los **números racionales**.

Para que las ecuaciones del tipo $ax = b$ tengan siempre solución, inventamos el conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$:

Si a y b son racionales y $a \neq 0$, entonces $x = \frac{b}{a}$ es racional.

■ Di cuáles de las siguientes ecuaciones se pueden resolver en $\mathbb{Z}$ y para cuáles es necesario el conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$.

a) $-5x = 60$ b) $-7x = 22$

c) $2x + 1 = 15$ d) $6x - 2 = 10$

e) $-3x - 3 = 1$ f) $-x + 7 = 6$

El paso de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$

Intenta resolver, sin salir de $\mathbb{Q}$, las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 - 12 = 0$ b) $x^2 - 6x + 8 = 0$

c) $2x^2 + x - 1 = 0$ d) $x^2 - 2 = 0$

Las tres primeras tienen soluciones **racionales**, pero la cuarta no, pues no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. Para poder resolverla, necesitamos los **números irracionales**. Con ellos, dicha ecuación sí se puede resolver en el conjunto $\mathbb{R}$ de los **números reales**.

■ Resuelve, ahora, las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 9 = 0$ b) $5x^2 - 15 = 0$

c) $x^2 - 3x - 4 = 0$ d) $2x^2 - 5x + 1 = 0$

e) $7x^2 - 7x = 0$ f) $2x^2 + 3x = 0$

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, formado por la unión de los racionales y los irracionales, permite resolver ecuaciones que no tenían solución en $\mathbb{Q}$.

Sin embargo, sigue habiendo ecuaciones, algunas tan sencillas como $x^2 + 1 = 0$, que carecen de solución en $\mathbb{R}$. Por eso se crea un nuevo conjunto numérico, los **números complejos**, que contiene a los números reales y en el cual se puede resolver cualquier ecuación polinómica. Lo estudiaremos en la unidad 6.

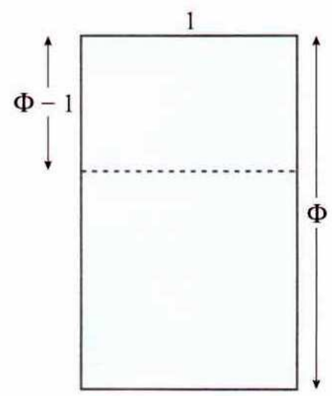
Números irracionales

Vamos a recordar algunos números irracionales especialmente interesantes:

- $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, … y, en general, la raíz n-ésima de un número entero que no sea potencia n-ésima exacta.
- π, relación entre la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro.
- $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, número áureo.

■ Demuestra que $\sqrt{2}$ es irracional. Para ello, supón que no lo es: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Eleva al cuadrado y llega a una contradicción.

■ Obtén el valor de Φ teniendo en cuenta que un rectángulo de dimensiones $\Phi : 1$ es semejante al rectángulo que resulta de suprimirle un cuadrado.



1.1 NÚMEROS REALES. LA RECTA REAL

RECUERDA

$\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales (enteros positivos).

$\mathbb{Z}$ es el conjunto de todos los números enteros.

$\mathbb{Q}$ es el conjunto de los racionales.

$\mathbb{I}$ es el conjunto de los irracionales.

$\mathbb{R}$ es el conjunto de los reales.

Los **números racionales** son los que se pueden poner como cociente de dos números enteros. Entre ellos están los propios **números enteros** (positivos **—naturales—** y negativos).

Los números racionales se pueden expresar mediante decimales exactos o periódicos.

El conjunto de todos los números racionales se designa por $\mathbb{Q}$. Al situarlos sobre la recta numérica la ocupan densamente. Esto quiere decir que:

— Entre dos números racionales hay otros infinitos números racionales.

— Si tomamos un punto cualquiera de la recta numérica hay infinitos números racionales tan cerca de él como queramos.

No obstante, en la recta numérica hay infinitos puntos no ocupados por números racionales. A cada uno de esos puntos le corresponde un **número irracional**.

Los **números irracionales** no se pueden poner como cociente de dos números enteros. Por ejemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{10}$, Φ (número áureo), π, etc. La expresión decimal de un número irracional tiene infinitas cifras no periódicas.

Tanto los números racionales como los irracionales se llaman **números reales**. El conjunto de los números reales se designa por $\mathbb{R}$.

Los números reales llenan la recta numérica. Es decir, si se señala en la recta un origen, O, y se sitúa el punto correspondiente al número 1 (es decir, se concreta cuál es la longitud unidad), a cada número real le corresponde un punto de la recta y a cada punto de la recta le corresponde un número real. Por eso a la recta numérica se la llama **recta real**.

LENGUAJE MATEMÁTICO

Que el conjunto de los números reales está formado por los racionales y los irracionales se puede expresar, en matemáticas, así:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

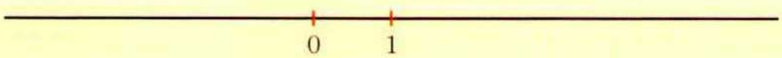
El símbolo $\cup$ se lee "unión".

Que todos lo números racionales son reales se expresa, simbólicamente, así:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \quad \text{o bien} \quad \mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$$

$\subset$ se lee "está contenido en".

$\supset$ se lee "contiene a".



Los puntos de la recta y los números reales están en correspondencia biunívoca: a cada punto le corresponde un número y a cada número, un punto.

ATENCIÓN

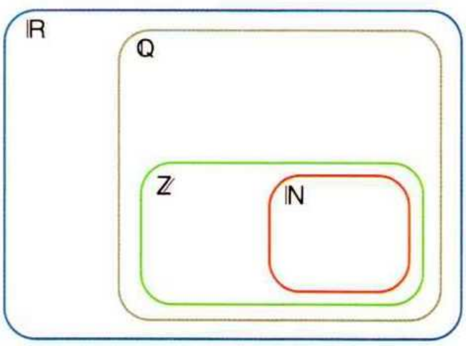
Hay operaciones cuyo resultado no es un número real. Por ejemplo:

$$\sqrt{-4},\ \sqrt{-5},\ \sqrt[4]{-8}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sitúa los siguientes números en el diagrama:

$\sqrt{3}$; 5; -2; 4,5; $7,\widehat{3}$; $-\sqrt[3]{6}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt{-8}$



2. Sitúa los números del ejercicio anterior en los siguientes casilleros. Cada número puede estar en más de una casilla.

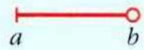
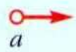
NATURALES, $\mathbb{N}$	
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	
REALES, $\mathbb{R}$	
NO REALES	

Añade un número más (de tu cosecha) en cada casilla.

Intervalos y semirrectas

Recordamos la nomenclatura que se usa para designar algunos tramos de la recta real.

> **LENGUAJE MATEMÁTICO**
>
> Cuando definimos un conjunto indicando cómo son sus elementos, lo hacemos escribiéndolo entre llaves: {…}.
>
> El símbolo / se lee "tal que".

NOMBRE	SÍMBOLO	SIGNIFICADO		REPRESENTACIÓN
INTERVALO ABIERTO	(a, b)	$\{x \,/\, a < x < b\}$	Números comprendidos entre a y b, estos no incluidos.	
INTERVALO CERRADO	$[a, b]$	$\{x \,/\, a \le x \le b\}$	Números comprendidos entre a y b, estos incluidos.	
INTERVALO SEMIABIERTO	$(a, b]$	$\{x \,/\, a < x \le b\}$	Números comprendidos entre a y b; a no incluido, b incluido.	
	$[a, b)$	$\{x \,/\, a \le x < b\}$	Números comprendidos entre a y b; a incluido, b no incluido.	
SEMIRRECTA	$(-\infty, a)$	$\{x \,/\, x < a\}$	Números menores que a, este no incluido.	
	$(-\infty, a]$	$\{x \,/\, x \le a\}$	Números menores que a y el propio a.	
	$(a, +\infty)$	$\{x \,/\, a < x\}$	Números mayores que a, este no incluido.	
	$[a, +\infty)$	$\{x \,/\, a \le x\}$	Números mayores que a y el propio a.	

> **LENGUAJE MATEMÁTICO**
>
> Cuando queremos referirnos a un conjunto de puntos formado por dos o más de estos intervalos, recurrimos nuevamente al signo $\cup$ (unión). Por ejemplo,
>
> $$[3, 4) \cup (5, +\infty)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Representar los siguientes conjuntos numéricos:*

a) Números mayores que 3.

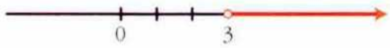
b) $\{x \,/\, 2 \le x < 5\}$

c) $\{x \,/\, 3 \le x \le 7\}$

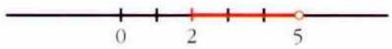
d) Números menores que 1 excluyendo el 0.

e) $\{x \,/\, x^2 \ge 4\} = \{x \,/\, x \le -2\} \cup \{x \,/\, x \ge 2\}$

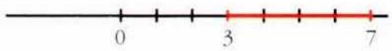
a) $(3, +\infty)$



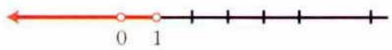
b) $[2, 5)$



c) $[3, 7]$



d) $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$



e) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

3. Representa los siguientes conjuntos:

a) $(-3, -1)$ b) $[4, +\infty)$

c) $(3, 9]$ d) $(-\infty, 0)$

4. Representa los siguientes conjuntos:

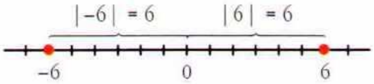
a) $\{x \,/\, -2 \le x < 5\}$ b) $[-2, 5) \cup (5, 7]$

c) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ d) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

1.2 VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

VALOR ABSOLUTO

Gráficamente, el valor absoluto de un número es su distancia al 0.



El valor absoluto de un número real nos da "el tamaño" de dicho número. Por ejemplo, – 8 y 8 tienen el mismo valor absoluto: 8.

El **valor absoluto** de un número real, a, es el propio número a, si es positivo, o su opuesto, $-a$, si es negativo:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar el valor absoluto de:*

a) 7,4; b) 0; c) –5,87;

d) raíces cuadradas de 9

e) $1 - \sqrt{3}$

a) $|7,4| = 7,4$

b) $|0| = 0$

c) $|-5,87| = 5,87$

d) Las raíces cuadradas de 9 son 3 y –3. El valor absoluto de ambas es 3.

e) $|1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$, pues $\sqrt{3}$ es mayor que 1.

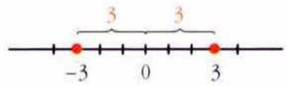
2. *¿Para qué valores de x se cumplen las siguientes igualdades?*

a) $|x| = 3$

b) $|x| = 0$

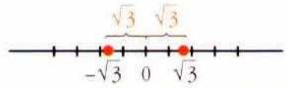
c) $|x| = \sqrt{3}$

a) $|x| = 3 \iff x = 3$ o $x = -3$



b) $|x| = 0 \iff x = 0$

c) $|x| = \sqrt{3} \iff x = \sqrt{3}$ o $x = -\sqrt{3}$



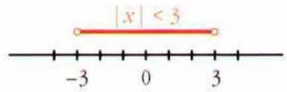
3. *¿Para qué valores de x se cumplen las siguientes desigualdades?*

a) $|x| < 3$

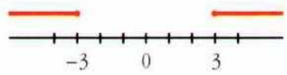
b) $|x| \geq 3$

c) $|x - 2| \leq 3$

a) $|x| < 3 \iff -3 < x < 3 \iff x \in (-3, 3)$

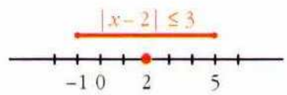


b) $|x| \geq 3 \iff x \leq -3$ o $x \geq 3$



c) $|x - 2| \leq 3 \iff -3 \leq x - 2 \leq 3 \iff$

$\iff -3 + 2 \leq x \leq 3 + 2 \iff -1 \leq x \leq 5$



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halla los siguientes valores absolutos:

a) $|-11|$ b) $|\pi|$ c) $|-\sqrt{5}|$

d) $|0|$ e) $|3 - \pi|$ f) $|3 - \sqrt{2}|$

g) $|1 - \sqrt{2}|$ h) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}|$ i) $|7 - \sqrt{50}|$

2. Averigua para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones:

a) $|x| = 5$ b) $|x| \leq 5$ c) $|x - 4| = 2$

d) $|x - 4| \leq 2$ e) $|x - 4| > 2$ f) $|x + 4| > 5$

1.3 RADICALES. PROPIEDADES

Recordemos que $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$, donde n es un número natural mayor que 1, y a y b son números reales.

$\sqrt[n]{a}$ se llama **radical**, a **radicando** y n **índice** de la raíz.

- Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe cualquiera que sea a.
- Si $a < 0$, $\sqrt[n]{a}$ solo existe para valores impares de n.

Forma exponencial de los radicales

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, pues $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, pues $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$

Propiedades de los radicales. Potencias y raíces

① $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$, pues $\sqrt[np]{a^p} = a^{p/np} = a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

Esta propiedad es útil para:

— Simplificar radicales: $\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$; $\sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2}$

— Conseguir que dos o más radicales tengan el mismo índice (reducir a índice común).

② $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$, pues $(a^{1/n})^p = a^{(1/n) \cdot p} = (a^p)^{1/n} = \sqrt[n]{a^p}$

Esta propiedad solo es válida cuando existen los radicales $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{a^p}$.

Por ejemplo, no podemos poner que $(\sqrt{-5})^4 = \sqrt{(-5)^4} = 25$, pues el primer radical no tiene significado numérico.

③ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, pues $(a^{1/n})^{1/m} = a^{(1/n) \cdot (1/m)} = a^{1/mn} = \sqrt[mn]{a}$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Comparar $\sqrt[3]{103}$ y $\sqrt{22}$ reduciéndolos a índice común.*

$\sqrt[3]{103} = \sqrt[6]{103^2} = \sqrt[6]{10\,609}$

$\sqrt{22} = \sqrt[6]{22^3} = \sqrt[6]{10\,648}$

Vemos que $\sqrt[3]{103} < \sqrt{22}$

2. *Simplificar: a) $\sqrt[12]{x^9}$ b) $(\sqrt[3]{a^2})^6$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$*

a) $\sqrt[12]{x^9} = \sqrt[3 \cdot 4]{x^{3 \cdot 3}} = \sqrt[4]{x^3}$

b) $(\sqrt[3]{a^2})^6 = (a^2)^2 = a^4$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Simplifica:

a) $\sqrt[12]{x^9}$ b) $\sqrt[12]{x^8}$ c) $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ e) $\sqrt[9]{64}$ f) $\sqrt[8]{81}$

2. ¿Cuál es mayor, $\sqrt[4]{31}$ o $\sqrt[3]{13}$?

3. Reduce a índice común:

a) $\sqrt[12]{a^5}$ y $\sqrt[18]{a^7}$ b) $\sqrt[3]{51}$ y $\sqrt[9]{132\,650}$

4. Simplifica:

a) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}\right)^8$ b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ c) $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$

Propiedades del producto y del cociente de radicales

④ $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, pues $\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{1/n} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Por ejemplo: $\sqrt{3x^2y} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y}$; $\sqrt[5]{32x} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{x} = 2\sqrt[5]{x}$

Esta propiedad tiene las siguientes aplicaciones:

— Sacar un factor fuera de la raíz. Por ejemplo:

$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{4} = 2 \cdot \sqrt[3]{4}$; $\sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$

— Al contrario, juntar varios radicales en uno solo: $\sqrt{15} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{300}$

⑤ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, pues $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{a^{1/n}}{b^{1/n}}$

Por ejemplo: $\sqrt{\dfrac{3}{x^3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^3}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{x^5}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^5}}{2}$

Esta propiedad, junto con las propiedades ① y ④, sirve para poner productos y cocientes de radicales bajo una sola raíz. Por ejemplo:

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}} = \frac{\sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3 \cdot 3}} = \sqrt[6]{\frac{3^3 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3}} = \sqrt[6]{2 \cdot 3^2} = \sqrt[6]{18}$$

Suma de radicales

Dos radicales distintos no pueden sumarse si no es obteniendo sus expresiones decimales aproximadas. Solo pueden sumarse radicales idénticos.

Por ejemplo, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ o $\sqrt{7} + \sqrt[3]{7}$ solo pueden realizarse de forma aproximada o dejándolas indicadas.

Sí puede simplificarse $7\sqrt{5} + 11\sqrt{5} - \sqrt{5} = 17\sqrt{5}$.

Hay casos en los que la posibilidad de simplificar una suma de radicales no es evidente. Por ejemplo:

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt[4]{2\,500} = \sqrt{2^3} + \sqrt{3^2 \cdot 2} + \sqrt[4]{2^2 \cdot 5^4} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

5. Reduce:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$ d) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{4}$

6. Simplifica:

a) $\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt[3]{a \cdot b}}$

c) $\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}}$

7. Reduce:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt{3}}$

8. Suma y simplifica:

a) $5\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$ b) $\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$

d) $\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$

e) $\sqrt{50a} - \sqrt{18a}$

Racionalización de denominadores

A veces conviene suprimir los radicales que hay en un denominador. Para ello, hay que multiplicarlo por la expresión adecuada. Naturalmente, el numerador también se multiplicará por esa expresión.

Veamos los procedimientos para suprimir raíces del denominador en los casos más frecuentes:

- Para suprimir una raíz cuadrada, basta multiplicar por la misma raíz.

  Por ejemplo: $\dfrac{7}{\sqrt{2}} = \dfrac{7 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

- Para suprimir una raíz n-ésima, se multiplica por otra raíz n-ésima tal que se complete en el radicando una potencia n-ésima.

  Por ejemplo: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{5}}{5}$

- En una suma de raíces cuadradas, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, se suprimen los radicales multiplicando por la diferencia de ellas, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, y recíprocamente.

  Por ejemplo:

$$\frac{7}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{7(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{7(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{7(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2}$$

$$\frac{3}{3 + \sqrt{7}} = \frac{2(3 - \sqrt{7})}{(3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7})} = \frac{2(3 - \sqrt{7})}{3^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{2(3 - \sqrt{7})}{2} =$$

$$= 3 - \sqrt{7}$$

RECUERDA

"Suma por diferencia"
es igual a
"diferencia de cuadrados":
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

EJERCICIOS PROPUESTOS

9. Racionaliza denominadores y simplifica cuando puedas:

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$

c) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}}$ f) $\dfrac{4}{\sqrt{18}}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}}$ h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}}$ j) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}}$

10. Racionaliza denominadores y simplifica cuando puedas:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$ b) $\dfrac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

c) $\dfrac{a - 1}{\sqrt{a} - 1}$ d) $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

e) $\dfrac{1}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}$ f) $\dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$

h) $\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

1.4 LOGARITMOS. PROPIEDADES

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, se llama **logaritmo en base *a*** de P, y se designa $log_a P$, al exponente al que hay que elevar la base a para obtener P.

$$log_a P = x \iff a^x = P$$

Por ejemplo:

$log_2 8 = 3$ porque $8 = 2^3$, $\quad log_2 \dfrac{1}{8} = -3$ porque $\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2^3} = 2^{-3}$

$log_5 25 = 2$ porque $25 = 5^2$, $\quad log_5 \dfrac{1}{25} = -2$ porque $\dfrac{1}{25} = \dfrac{1}{5^2} = 5^{-2}$

$log_{10} 10\,000 = 4$ porque $10\,000 = 10^4$

$log_{10} 0{,}0001 = -4$ porque $0{,}0001 = 10^{-4}$

LOGARITMOS DE POTENCIAS EXACTAS

Los números que son potencias exactas de la base tienen logaritmos enteros. Los demás, tienen logaritmos con parte decimal.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{ccccc} 8 & \dots & 11 & \dots & 16 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle log_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle log_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle log_2} \\ 3 & & 3,\dots & & 4 \end{array}$$

El $log_2 11$ es un número decimal cuya parte entera es 3.

Propiedades de los logaritmos

1. Como **ampliación teórica**, en tu CD puedes encontrar indicaciones para demostrar estas propiedades.

① Dos números distintos tienen logaritmos distintos. Es decir:

Si $P \neq Q$, entonces $log_a P \neq log_a Q$.

Además, si $a > 1$ y $P < Q$, $log_a P < log_a Q$.

② El **logaritmo de la base** es 1: $log_a a = 1$, porque $a^1 = a$

③ El **logaritmo de 1** es 0, cualquiera que sea la base: $log_a 1 = 0$, porque $a^0 = 1$

④ El **logaritmo de un producto** es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$log_a (P \cdot Q) = log_a P + log_a Q$$

⑤ El **logaritmo de un cociente** es igual al logaritmo del numerador menos el del denominador:

$$log_a \left(\frac{P}{Q}\right) = log_a P - log_a Q$$

⑥ El **logaritmo de una potencia** es igual al exponente por el logaritmo de la base de la potencia:

$$log_a P^n = n \, log_a P$$

⑦ El **logaritmo de una raíz** es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice:

$$log_a \sqrt[n]{P} = \frac{log_a P}{n}$$

⑧ **Cambio de base**. El logaritmo en base a de un número se puede obtener a partir de logaritmos en otra base:

$$log_a P = \frac{log_b P}{log_b a}$$

ETIMOLOGÍA

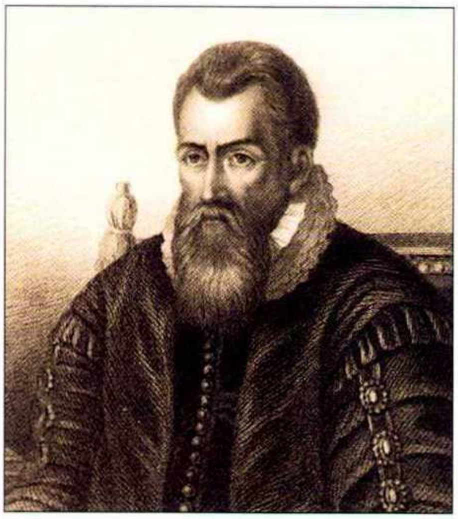
Logaritmo, del griego *logos* (relación) y *aritmos* (número): números de relación o de comparación. Pues, cuando se inventaron los logaritmos (y durante mucho tiempo), sirvieron para relacionar, comparar y operar con números de muchas cifras.

Naturalmente, todo esto era antes de que hubiera calculadoras.

NOTA HISTÓRICA

La preocupación por encontrar recursos que facilitaran las operaciones aritméticas enormes hizo que a principios del siglo XVII los logaritmos fueran inventados casi simultáneamente por dos matemáticos:

NAPIER (Neper), escocés, en 1614 y BÜRGUI, suizo, en 1620.



Napier

Logaritmos decimales

Los logaritmos en base 10 se llaman **logaritmos decimales** y, en lugar de designarse mediante log_{10}, se designan simplemente así: *log*

$$log\ K = log_{10}\ K$$

La tecla [log] de la calculadora sirve para calcular logaritmos decimales. Gracias a la propiedad ⑧ anterior, podemos obtener, con la ayuda de la calculadora, el logaritmo de un número en cualquier base.

$$log_a\ P = \frac{log\ P}{log\ a} \quad \rightarrow \quad \text{[log]}\ P \ [\div]\ \text{[log]}\ a\ [=] \quad \text{se obtiene } log_a\ P$$

Por ejemplo:

$$log_2\ 11 = \frac{log\ 11}{log\ 2} \quad \rightarrow \quad \text{[log]}\ 11\ [\div]\ \text{[log]}\ 2\ [=]\ \boxed{3.45943162}$$

Logaritmos neperianos

Se llaman así a los logaritmos cuya base es el número *e*, y se designan mediante *ln*:

$ln\ K = log_e\ K$ se lee *logaritmo neperiano* de *K*

Su nombre proviene de su inventor, Neper o Napier.

$e = 2{,}71828182846...$ es un número irracional. Su importancia es enorme en matemáticas superiores. Nos lo encontraremos, de nuevo, en la próxima unidad.

La tecla [lnx] de la calculadora sirve para calcular logaritmos neperianos. Estos logaritmos, además de su interés histórico, son enormemente importantes en matemáticas superiores.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar los siguientes logaritmos reconociendo la potencia correspondiente:*

a) $log_3\ 81$ *b)* $log\ 0{,}01$

c) $log_5\ 0{,}2$ *d)* $log_2\ 0{,}125$

a) $81 = 3^4$. Por tanto, $log_3\ 81 = 4$

b) $0{,}01 = 10^{-2}$. Por tanto, $log\ 0{,}01 = log_{10}\ 0{,}01 = -2$

c) $0{,}2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$. Por tanto, $log_5\ 0{,}2 = -1$

d) $0{,}125 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$. Por tanto, $log_2\ 0{,}125 = -3$

2. *Hallar la parte entera de los siguientes logaritmos:*

a) $log_2\ 100$

b) $log\ 650$

a) $2^6 = 64$, $2^7 = 128$; $2^6 < 100 < 2^7$. Por tanto, $6 < log_2\ 100 < 7$.

Es decir, $log_2\ 100 = 6,...$

b) $100 < 650 < 1\,000$. Por tanto $2 < log\ 650 < 3$.

Es decir, $log\ 650 = 2,...$

3. *Sabiendo que*

$log_2 A = 3,5$ y $log_2 B = -1,4$

calcular:

a) $log_2 \dfrac{A \cdot B}{4}$

b) $log_2 \dfrac{2\sqrt{A}}{B^3}$

a) $log_2 \left(\dfrac{A \cdot B}{4}\right) = log_2 A + log_2 B - log_2 4 = 3,5 - 1,4 - 2 = 0,1$

b) $log_2 \left(\dfrac{2\sqrt{A}}{B^3}\right) = log_2 2 + log_2 \sqrt{A} - log_2 B^3 =$

$= 1 + log_2 A^{1/2} - log_2 B^3 = 1 + \dfrac{1}{2} log_2 A - 3 \ log_2 B =$

$= 1 + \dfrac{1}{2} \cdot 3,5 - 3 \cdot (-1,4) = 6,95$

4. *Averiguar la relación que hay entre x e y, sabiendo que se verifica:*

$$ln\ y = x + ln\ 7$$

$ln\ y = ln\ e^x + ln\ 7$, pues $x = ln\ e^x$

$ln\ y = ln\ (e^x \cdot 7) \ \rightarrow \ y = e^x \cdot 7$

La relación entre x e y es $y = 7e^x$.

5. *Hallar con calculadora:*

a) $log_5 80$

b) $log_{12} 100$

Dar la solución con cuatro cifras decimales.

a) $log_5 80 = \dfrac{log\ 80}{log\ 5} = 2,7227$

La secuencia de teclas es la siguiente:

log 80 ÷ log 5 = 2.722706232

b) $log_{12} 100 = \dfrac{log\ 100}{log\ 12} = 1,8533$

La secuencia de teclas es la siguiente:

log 100 ÷ log 12 = 1.8532568

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halla:

a) $log_2 16$ b) $log_2 0,25$

c) $log_9 1$ d) $log_{10} 0,1$

e) $log_4 64$ f) $log_7 49$

g) $ln\ e^4$ h) $ln\ e^{-1/4}$

i) $log_5 0,04$ j) $log_6 \left(\dfrac{1}{216}\right)$

2. Halla la parte entera de:

a) $log_2 60$ b) $log_5 700$

c) $log_{10} 43\,000$ d) $log_{10} 0,084$

e) $log_9 60$ f) $ln\ e$

3. Aplica la propiedad (8) para obtener los siguientes logaritmos con la ayuda de la calculadora:

a) $log_2 1\,500$ b) $log_5 200$

c) $log_{100} 200$ d) $log_{100} 40$

En cada caso, comprueba el resultado utilizando la potenciación.

4. Sabiendo que $log_5 A = 1,8$ y $log_5 B = 2,4$, calcula:

a) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}}$ b) $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$

5. Averigua la relación que hay entre x e y, sabiendo que se verifica:

$$ln\ y = 2x - ln\ 5$$

1.5 EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS REALES. NÚMEROS APROXIMADOS

Los números reales reflejan con absoluta precisión resultados teóricos. Por ejemplo, $\frac{3\sqrt{5}\,\pi}{13}$ es un número real cuyo significado es clarísimo. Su expresión decimal consta de infinitas cifras (1,62111109...). Sin embargo, en la práctica (ciencia aplicada, economía, técnica o, simplemente, en la vida cotidiana), estos números se expresan en forma decimal y con una cantidad reducida de cifras. Así, el número anterior se quedaría en 1,6; 1,62 o bien 1,621, según la precisión que requiera la operación que estemos realizando.

En este proceso

$$\text{número real exacto} \longrightarrow \text{expresión decimal aproximada}$$

se comete un error. Recordemos:

$$\text{Error absoluto} = \text{Valor real (exacto)} - \text{Valor aproximado}$$

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor real}}$$

Estos errores no solo se producen al redondear a forma decimal un número real. También aparecen en procesos de medición, estimación, etc.

TEN EN CUENTA

El error absoluto se expresa en la misma magnitud que la medición que se efectúa.

El error relativo es un número abstracto (sin unidades). Se puede expresar en tantos por ciento.

Cotas de error

Para que la cantidad aproximada que utilizamos sea fiable, es imprescindible que el error cometido esté controlado, de modo que se pueda afirmar que

$$|\text{Error absoluto}| < k \quad \text{o bien que} \quad |\text{Error relativo}| < k'$$

Los números k y k' se llaman **cotas de error** (absoluto y relativo, respectivamente).

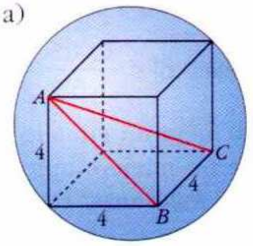
EJERCICIOS RESUELTOS

1. *a) Calcular el volumen, en m^3, de la esfera circunscrita a un cubo de 4 m de lado.*

b) Aproximar el volumen hasta los hectolitros.

c) Dar una cota del error absoluto y otra del error relativo.

a)



$\overline{AB} = 4\sqrt{2}$; $\overline{AC} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ m

El radio, R, de la esfera es $\frac{\overline{AC}}{2} \to R = 2\sqrt{3}$ m

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(2\sqrt{3})^3 = 32\sqrt{3}\,\pi \text{ m}^3$$

b) Valor aproximado (1 hl = 0,1 m^3):

$$V_{\text{esfera}} = 174{,}1 \text{ m}^3$$

c) $|\text{Error absoluto}| < 0{,}05 \text{ m}^3$

$$|\text{Error relativo}| < \frac{0{,}05}{174{,}1} = 0{,}000287\ldots < 0{,}0003$$

Observamos que el error absoluto (y su cota) se da en la misma magnitud que la medida ($m^3 \to$ volumen) mientras que el error relativo es un número abstracto. Se puede dar en tantos por ciento. En este caso diríamos que el error relativo es menor que el 0,03%.

Cifras significativas

En la página anterior dábamos varias expresiones aproximadas del número $\dfrac{3\sqrt{5}\pi}{13} = 1{,}62111109\ldots$

EXPRESIONES APROXIMADAS: 1,6 1,62 1,621

Los números aproximados se expresan con varias cifras que sabemos exentas de error. Se llaman **cifras significativas**. En las expresiones aproximadas anteriores hemos utilizado, respectivamente, 2, 3 ó 4 cifras significativas.

El **error absoluto** suele ser menor que 5 unidades del lugar siguiente al de la última cifra significativa utilizada. En el ejemplo anterior, los errores absolutos estarían acotados, respectivamente, así:

COTAS DE ERROR ABSOLUTO: 0,05 0,005 0,0005

El **error relativo** es tanto menor cuanto más cifras significativas se utilicen.

En ocasiones utilizamos ceros para poder expresar una medición. Por ejemplo, si decimos que el número de habitantes de una ciudad es 3 800 000, probablemente solo controlemos las dos primeras cifras, con lo cual los últimos ceros no serían cifras significativas. En tal caso sería más razonable decir que el número de habitantes es 3,8 millones o bien 38 cientos de miles.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Dar una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes medidas:*

a) 3 millones de personas.

b) 0,57 millones de euros.

c) 0,570 millones de euros.

a) Si se trata de una estimación fiable, es admisible que el error absoluto sea menor que medio millón de personas.

$|\text{Error absoluto}| < 0{,}5$ millones de personas

$|\text{Error relativo}| < \dfrac{0{,}5}{3} = 0{,}1666\ldots < 0{,}17 \rightarrow |\text{E.R.}| < 17\%$

b) Si se trata de un número aproximado, entonces:

$|\text{Error absoluto}| < 0{,}005$ millones de euros $\rightarrow |\text{E.A.}| < 5\,000$ €

$|\text{Error relativo}| < \dfrac{0{,}005}{0{,}57} = 0{,}0087\ldots < 0{,}009 \rightarrow |\text{E.R.}| < 0{,}9\%$

c) Si 0,570 fuera un número exacto, daría igual poner 0,57. Pero tratándose de un número aproximado, el cero final significa que esa cifra (la de las milésimas) está controlada. Por tanto:

$|\text{Error absoluto}| < 0{,}0005$ millones de euros $\rightarrow |\text{E.A.}| < 500$ €

$|\text{Error relativo}| < \dfrac{0{,}0005}{0{,}570} = 0{,}0009 \rightarrow |\text{E.R.}| < 0{,}09\%$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Di una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes mediciones:

a) La superficie de esta casa es de 96,4 m^2.

b) Por la gripe se han perdido 37 millones de horas de trabajo.

c) Juana gana 19 000 € al año.

■ **PRACTICA**

Di el error absoluto y el error relativo de las siguientes cantidades aproximadas:

a) $3{,}800 \times 10^{16}$ m

b) $2{,}5 \times 10^{-6}$ horas

c) $6{,}3 \times 10^{9}$ personas

d) $2{,}40 \times 10^{-12}$ g

Notación científica

■ El volumen de la Tierra es $1{,}08 \times 10^{21}$ m^3. Obviamente se trata de un número aproximado y está dado en **notación científica**.

Como número aproximado, podemos decir que:

$$|\text{E. A.}| < 0{,}005 \times 10^{21} \text{ m}^3 = 5 \times 10^{18} \text{ m}^3 \ \rightarrow \ |\text{E.A.}| < 5 \times 10^{18} \text{ m}^3$$

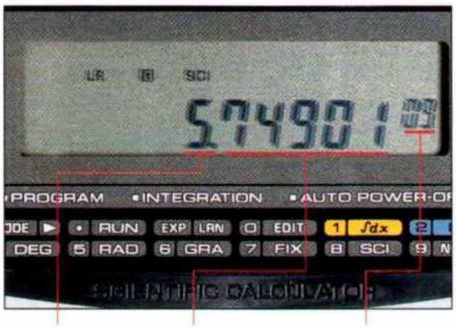
$$|\text{E. R.}| < \frac{0{,}005}{1{,}08} = 0{,}0046\ldots < 0{,}005 \ \rightarrow \ |\text{E.R.}| < 0{,}5\%$$

■ Un cierto virus tiene un diámetro de $3{,}0 \times 10^{-9}$ m. También se trata de un número aproximado puesto en notación científica.

$$|\text{E. A.}| < 0{,}05 \times 10^{-9} \text{ m} = 5 \times 10^{-11} \text{ m} \ \rightarrow \ |\text{E.A.}| < 5 \times 10^{-11} \text{ m}$$

$$|\text{E. R.}| < \frac{0{,}05}{3{,}0} = 0{,}01666\ldots < 0{,}02 \ \rightarrow \ |\text{E.R.}| < 2\%$$

Calculadora para la notación científica



Parte entera — Parte decimal — Potencia entera de base 10

Como sabes, la tecla EXP ayuda a expresar números en notación científica. Pero además, la calculadora posee un modo de actuación (MODE SCI) específico para esta notación:

El modo SCI hace que la calculadora trabaje siempre con números en notación científica y, además, con la cantidad de cifras significativas que previamente le hayamos indicado.

Por ejemplo, con una calculadora en la que se accede al modo SCI mediante la secuencia MODE 8, deseamos trabajar con la notación científica *utilizando cuatro cifras significativas*. Haremos:

Preparación de la calculadora:

MODE 8 4 → 0.000^{00}

Multipliquemos $(3\,475\,980\,000) \cdot (1{,}27 \cdot 10^{-5})$.

Introducción del primer factor:

3 475 980 000 × → 3.476^{09}

Introducción del segundo factor y ejecución del producto:

1,27 EXP 5 +/– = → 4.414^{04}

Observaciones

- Cuando la calculadora está en modo SCI, admite expresiones no científicas, pero al darle a una tecla de operación o al =, pone el número en notación científica, con las cifras significativas deseadas, redondeando.
- La calculadora conserva en su memoria los dígitos que no exhibe en la pantalla. Si en el ejemplo anterior ponemos la calculadora en el MODO NORMAL (MODE 9), inmediatamente se muestra en la pantalla el resultado con todas las cifras: 44144.946

En tu CD se te explica cómo trabajar: con **DERIVE** (2) y con **CALCULADORA GRÁFICA** (3) algunos aspectos de esta unidad.

EJERCICIOS PROPUESTOS

2. Calcula en notación científica sin usar la calculadora:

a) $(800\,000 : 0{,}0002) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{12}$

b) $0{,}486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7}$

3. Opera con la calculadora:

a) $(3{,}87 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{-9}) : (3{,}941 \cdot 10^{-6})$

b) $8{,}93 \cdot 10^{-10} + 7{,}64 \cdot 10^{-10} - 1{,}42 \cdot 10^{-9}$

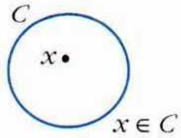
LENGUAJE MATEMÁTICO

EL LENGUAJE DE LOS CONJUNTOS

- Los conjuntos suelen designarse mediante letras mayúsculas: C, X, Y, A, B..., aunque algunos conjuntos numéricos muy utilizados tienen una simbología especial que ya conoces: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

- Para expresar que x es un **elemento** del conjunto C se utiliza el símbolo $\in$ (pertenece): $x \in C$ se lee "x **pertenece** a C"; $y \notin C$ se lee "y *no pertenece* a C".

  Por ejemplo: 5 es un número natural $\rightarrow 5 \in \mathbb{N}$; $\sqrt{2}$ no es natural $\rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{N}$



- Para **describir conjuntos** se utilizan, habitualmente, los siguientes símbolos:

  { } (llaves), encierran los elementos del conjunto o la propiedad que los caracteriza.

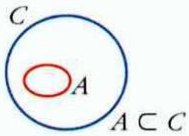
  El símbolo / ("tales que"), precede a la propiedad que caracteriza a los elementos del conjunto.

  Por ejemplo:

  Números enteros comprendidos entre –3 y 4: $\{x \in \mathbb{Z} \,/\, -3 < x < 4\}$.
  Se lee "el conjunto de los x pertenecientes a $\mathbb{Z}$ *tales que* $-3 < x < 4$".

- Si todos los elementos de A son también elementos de C decimos que A es un **subconjunto** de C y lo expresamos así: $A \subset C$ (A está contenido en C), o así: $C \supset A$ (C contiene a A).

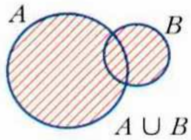
  Por ejemplo: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, o bien $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$.



- El conjunto formado por todos los elementos de otros dos conjuntos A y B se designa $A \cup B$. Se lee "A **unión** B". Por ejemplo:

  Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$.

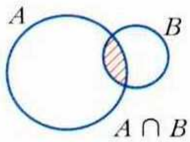
  Si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$. Por ejemplo, $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.



- El conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B (a ambos) se designa $A \cap B$. Se lee "A **intersección** B". Por ejemplo:

  Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, entonces $A \cap B = \{2, 4, 6\}$.

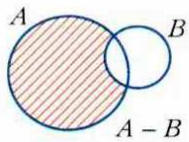
  Si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$. Por ejemplo, $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$.



- El conjunto formado por todos los elementos de A que no están en B se designa $A - B$. Se lee "A menos B". $A - B$ se llama conjunto **diferencia**. Por ejemplo:

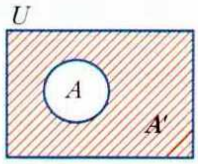
  Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, entonces $A - B = \{1, 3, 5\}$ y $B - A = \{8, 10\}$.

  Los números naturales que no son múltiplos de 3: $\mathbb{N} - \{x / x = \dot{3}\}$.



- Si en un cierto contexto hay un conjunto U en el cual están contenidos todos los demás conjuntos que se manejen, a U se le llama *conjunto universal*. En la mayoría de las aplicaciones numéricas de este curso, $\mathbb{R}$ es el conjunto universal.

- Si U es el conjunto universal, $U - A$ se llama *complementario* de A y se designa A' o A^c.



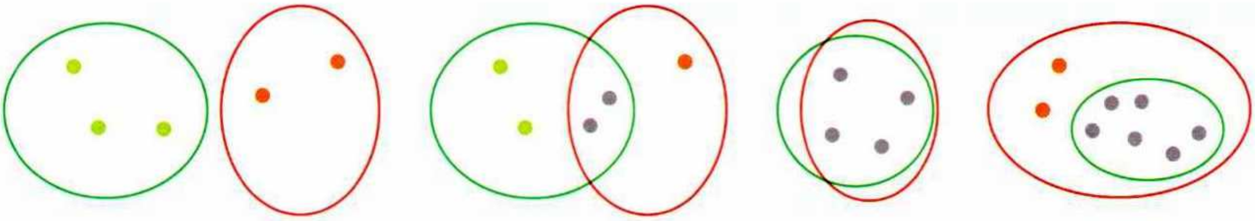
■ De dos conjuntos dados puede que ocurra:

— Que no tengan ningún elemento en común, y entonces $A \cap B = \emptyset$ (conjunto vacío).

— Que tengan algún elemento común, pero no todos, y entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

— Que tengan todos los elementos comunes, y entonces $A = B$.

— Que todos los elementos de A estén en B, y entonces $A \subset B$ ("A incluido en B").



$A \cap B = \emptyset$ $\quad$ $A \cap B \neq \emptyset$ $\quad$ $A = B$ $\quad$ $A \subset B$

Relaciones (verbos) y nuevos conjuntos (sustantivos)

■ En las expresiones matemáticas, los símbolos $\in$ (pertenece), $\subset$ (está contenido), $=$ (es igual a), $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, … desempeñan el mismo papel que los **verbos** en el lenguaje cotidiano.

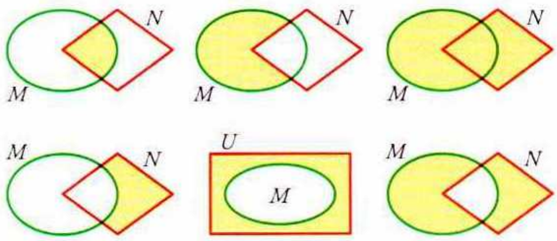
Por tanto, se emplean para establecer relaciones, para afirmar o negar algo, es decir, para construir **frases**. (En una frase se afirma o se niega algo).

■ A partir de conjuntos A y B se pueden obtener otros nuevos, como $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$. Son como los **sustantivos** del lenguaje cotidiano, de los cuales no se afirma nada.

Para decir algo sobre ellos se necesita un verbo (una relación), como por ejemplo, $A \cap B \subset A$.

EJERCICIOS

1. Da nombre al conjunto sombreado en cada caso:



2. Expresa simbólicamente estas relaciones:

a) 13 es un número natural.

b) -4 es un número entero.

c) 0,43 es un número racional.

d) π es un número real.

e) Todos los enteros son racionales.

f) El intervalo $[3, 4]$ está formado por números reales.

3. Designa simbólicamente estos conjuntos:

a) Los números enteros mayores que -5 y menores que 7 (utiliza $\mathbb{Z}$ y el intervalo abierto $(-5, 7)$).

b) Los números irracionales (utiliza $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$).

c) Los números racionales mayores que 2 y menores o iguales que 3.

d) Los números que son múltiplos de 2 o de 3 (el conjunto de los múltiplos de p se designa $\dot{p}$).

4. Traduce:

a) $\{x \in \mathbb{Z} \,/\, x \geq -4\}$

b) $\{x \in \mathbb{N} \,/\, x > 5\}$

c) $\{x \in \mathbb{N} \,/\, 1 < x \leq 9\}$

d) $\{x \in \mathbb{Z} \,/\, -2 \leq x < 7\}$

5. ¿Cuáles son los números que forman el conjunto $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1 Conjuntos de números

Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ pertenecen:

$$5;\ -7;\ 0{,}23;\ \frac{5}{4};\ \sqrt{\frac{18}{2}};$$

$$-\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ -\frac{\pi}{2};\ 4{,}\hat{7};\ \sqrt{-4}$$

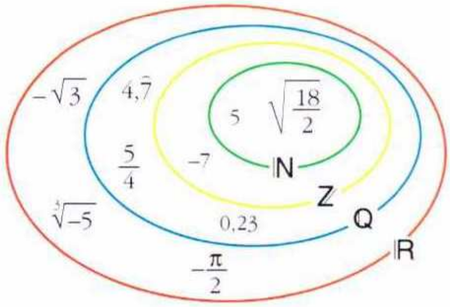
Teniendo en cuenta la relación de inclusión entre los conjuntos numéricos, si un número es natural, también es entero, racional y real. La clasificación es la siguiente:

$\mathbb{N}$: $5,\ \sqrt{\frac{18}{2}} = 3$

$\mathbb{Z}$: $5,\ -7,\ \sqrt{\frac{18}{2}}$

$\mathbb{Q}$: $5;\ -7;\ 0{,}23;\ \frac{5}{4};\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ 4{,}\hat{7}$

$\mathbb{R}$: Son todos excepto $\sqrt{-4}$



2 Potencias

Efectúa las siguientes operaciones utilizando las potencias y sus propiedades:

a) $\dfrac{3^{-2}-5^{-2}}{3^{-1}-5^{-1}}$

b) $(0{,}125)^{1/3}\cdot(0{,}25)^{-1/2}$

c) $\dfrac{2^5\cdot 6^{-3}\cdot(-3)^8}{18^{-2}\cdot(-12)^3}$

d) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^{-2}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{a}}$

a) $$\frac{3^{-2}-5^{-2}}{3^{-1}-5^{-1}} = \frac{\frac{1}{9}-\frac{1}{25}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}} = \frac{\frac{16}{225}}{\frac{2}{15}} = \frac{16\cdot 15}{2\cdot 225} = \boxed{\frac{8}{15}}$$

b) $$(0{,}125)^{\frac{1}{3}}\cdot(0{,}25)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{125}{1\,000}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{100}}} = \frac{5}{10}\cdot\frac{10}{5} = \boxed{1}$$

c) Descomponemos 6, 12 y 18 en factores primos:

$$\frac{2^5\cdot(2\cdot 3)^{-3}\cdot(-3)^8}{(2\cdot 3^2)^{-2}\cdot(-2^2\cdot 3)^3} = \frac{2^5\cdot 2^{-3}\cdot 3^{-3}\cdot 3^8}{2^{-2}\cdot 3^{-4}\cdot(-2^6)\cdot 3^3} = \frac{2^2\cdot 3^5}{-2^4\cdot 3^{-1}} =$$

$$= \frac{3^6}{-2^2} = \boxed{-2^{-2}\cdot 3^6}$$

d) $$\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{1/a}}{\sqrt[4]{a^2}} = \frac{a^{2/3}\cdot a^{-1/2}}{a^{1/2}} = a^{2/3-1/2-1/2} = a^{-1/3} = \boxed{\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}$$

3 Notación científica

Efectúa las siguientes operaciones; expresa el resultado en notación científica con tres cifras significaticas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometido en cada caso.

a) $\dfrac{5{,}12\cdot 10^3\cdot 4{,}2\cdot 10^7}{1{,}8\cdot 10^{15}}$

b) $\dfrac{4\cdot 10^{-15}-7\cdot 10^{-16}}{5{,}38\cdot 10^{-22}}$

Preparamos la calculadora MODE SCI 3.

a) 5.12 EXP 3 × 4.2 EXP 7 ÷ 1.8 EXP 15 = $\boxed{1{,}19\cdot 10^{-4}}$

$|\text{Error absoluto}| < 0{,}005\cdot 10^{-4} = 5\cdot 10^{-7}$

$|\text{Error relativo}| < \dfrac{5\cdot 10^{-7}}{1{,}19\cdot 10^{-4}} = 4{,}2\cdot 10^{-3}$

b) 4 EXP 15 +/− − 7 EXP 16 +/− = ÷ 5,38 EXP 22 +/− = $\boxed{6{,}13\cdot 10^{6}}$

$|\text{Error absoluto}| < 0{,}005\cdot 10^{6} = 5\cdot 10^{3} = 5\,000$

$|\text{Error relativo}| < \dfrac{5\cdot 10^{3}}{6{,}13\cdot 10^{6}} = 8{,}16\cdot 10^{-4} = 0{,}000816$

4 Entornos

Se llama entorno de centro a y radio r al siguiente intervalo: (a – r, a + r).

a) Describe como entorno los siguientes intervalos:

$I_1 = (-3, 5)$; $I_2 = (-6; -4{,}4)$

b) Expresa como intervalo el entorno de centro 2 y radio 0,1.

a) Buscamos el centro y el radio: $C = \dfrac{-3+5}{2} = 1$; $R = 5 - 1 = 4$

I_1 es un entorno de centro 1 y radio 4.

I_2 es un entorno de centro –5,2 y radio 0,8.

b) $I = (2 - 0{,}1;\ 2 + 0{,}1) = (1{,}9;\ 2{,}1)$

5 Valor absoluto

Explica cuáles son los números que cumplen cada una de estas expresiones:

a) $|x| = 5$

b) $|x + 1| = 3$

c) $|x| \le 4$

d) $|x| > 10$

a) Si $|x| = 5$ $\begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$ b) Si $|x + 1| = 3$ $\begin{cases} x + 1 = 3 \to x = 2 \\ x + 1 = -3 \to x = -4 \end{cases}$

c) $|x| \le 4$ x puede ser cualquier número comprendido entre –4 y 4, ambos incluidos.

Es decir, $-4 \le x \le 4$, o bien x es del intervalo $[-4, 4]$.

d) $|x| > 10$ x puede ser cualquier número mayor que 10 o menor que –10.

Es decir, $x < -10$ o $x > 10$, o bien x pertenece a $(-\infty, -10) \cup (10, +\infty)$.

6 Valor absoluto e intervalos

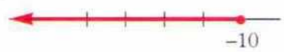
Expresa mediante intervalos los valores que puede tomar x en cada caso:

a) $|x - 2| < 5$

b) $|x + 3| \ge 7$

a) $|x - 2| < 5 \to -5 < x - 2 < 5 \to -3 < x < 7 \to \boxed{x \in (-3, 7)}$

b) $|x + 3| \ge 7$ ⟨ $x + 3 \ge 7 \to x \ge 4$; $x + 3 \le -7 \to x \le -10$



Solución: $\boxed{x \in (-\infty, -10] \cup [4, +\infty)}$

7 Radicales

Opera y simplifica:

a) $\sqrt{32} - \dfrac{\sqrt{50}}{2} + \dfrac{5}{\sqrt{18}}$

b) $\sqrt{8ab} \cdot \sqrt[3]{a^2 b}$

a) Simplificamos los radicales y racionalizamos el tercer término:

$\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$ $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$

$\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2} \to \dfrac{5}{\sqrt{18}} = \dfrac{5}{3\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{6}$

$$4\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{6} = \left(4 - \frac{5}{2} + \frac{5}{6}\right)\sqrt{2} = \frac{14}{6}\sqrt{2} = \boxed{\frac{7}{3}\sqrt{2}}$$

b) Reducimos los radicales a índice común:

mín.c.m. $(2, 3) = 6 \to \sqrt{8ab} = \sqrt[6]{(8ab)^3}$; $\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[6]{(a^2b)^2}$

$$\sqrt{8ab} \cdot \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[6]{8^3a^3b^3a^4b^2} = \sqrt[6]{2^9a^7b^5} = \boxed{2a\sqrt[6]{2^3ab^5}}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

8 Radicales

Racionaliza y simplifica:

a) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}$

b) $\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3} + \dfrac{1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

a) Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[4]{5^3}$:

$$\frac{2}{\sqrt[4]{5}} = \frac{2\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5}\sqrt[4]{5^3}} = \frac{2\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^4}} = \boxed{\frac{2\sqrt[4]{5^3}}{5}}$$

b) Racionalizamos cada fracción:

$$\frac{11}{2\sqrt{5}+3} = \frac{11(2\sqrt{5}-3)}{(2\sqrt{5}+3)(2\sqrt{5}-3)} = \frac{11(2\sqrt{5}-3)}{11} = 2\sqrt{5}-3$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{(1-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{8-4\sqrt{5}}{4} = 2-\sqrt{5}$$

Sumamos: $2\sqrt{5}-3+2-\sqrt{5} = \boxed{\sqrt{5}-1}$

9 Logaritmos

Halla con la calculadora y comprueba los resultados:

a) $\boldsymbol{log_7\ 123}$ ***b)*** $\boldsymbol{log_{1/2}\ 77}$

a) $log_7\ 123 = \dfrac{log\ 123}{log\ 7} \approx 2{,}473 \to 7^{2{,}473} \approx \boxed{123}$

b) $log_{1/2}\ 77 = \dfrac{log\ 77}{log\ (1/2)} \approx -6{,}267 \to \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-6{,}267} \approx \boxed{77}$

10 Logaritmos

Halla, sin utilizar la calculadora:

a) $\boldsymbol{log_5\ 625}$ ***b)*** $\boldsymbol{log\ 0{,}001}$

c) $\boldsymbol{ln\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}}$ ***d)*** $\boldsymbol{log_2\ 0{,}25}$

a) $log_5\ 625 = log_5\ 5^4 = \boxed{4}$

b) $log\ 0{,}001 = log\ \dfrac{1}{1\,000} = log\ 10^{-3} = \boxed{-3}$

c) $ln\ \dfrac{1}{\sqrt{e}} = ln\ e^{-1/2} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$

d) $log_2\ 0{,}25 = log_2\ \dfrac{1}{4} = log_2\ 2^{-2} = \boxed{-2}$

11 Logaritmos

Calcula el valor de x en cada una de estas expresiones:

a) $\boldsymbol{log_7\ x = -2}$

b) $\boldsymbol{log_x\ 16 = 2}$

c) $\boldsymbol{log\ 5^x = 12}$

d) $\boldsymbol{3^x = 173}$

a) Aplicamos la definición: $log_7\ x = -2 \to \boxed{x = 7^{-2} = \dfrac{1}{49}}$

b) Aplicamos la definición: $log_x\ 16 = 2 \to x^2 = 16 \to \boxed{x = 4}$

c) $log\ 5^x = 12 \xrightarrow{log\ p^n\ =\ n\ log\ p} x\ log\ 5 = 12 \to \boxed{x = 12/log\ 5 \approx 17{,}17}$

d) Tomamos logaritmos:

$log\ 3^x = log\ 173 \to x\ log\ 3 = log\ 173 \to \boxed{x = log\ 173/log\ 3 \approx 4{,}69}$

12 Logaritmos

Expresa como un solo logaritmo la expresión:

$$\boldsymbol{ln\ b + 2\ ln\ c - ln\ d}$$

$2\ ln\ c = ln\ c^2$ (propiedad 6)

$ln\ b + ln\ c^2 = ln\ (b \cdot c^2)$ (propiedad 4)

$ln\ (b \cdot c^2) - ln\ d = ln\ \dfrac{bc^2}{d}$ (propiedad 5)

$$\boxed{ln\ b + 2\ ln\ c - ln\ d = ln\ \frac{bc^2}{d}}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS 1

PARA PRACTICAR

Números racionales e irracionales

1 Expresa como fracción cada decimal y opera:

$$0,\widehat{12} - 5,\widehat{6} - 0,2\widehat{3} + 3,1$$

☛ *Recuerda que* $5,\widehat{6} = \frac{56-5}{9}$; $0,2\widehat{3} = \frac{23-2}{90}$.

2 Demuestra que el producto $4,0\widehat{9} \cdot 1,3\widehat{9}$ es un decimal exacto.

☛ *Comprueba, pasando a fracción, que los dos factores son decimales exactos.*

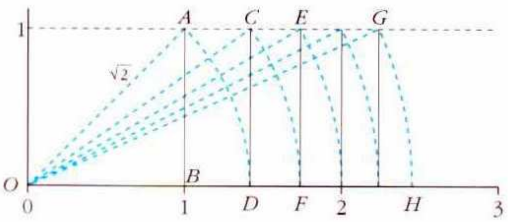
3 Calcula: a) $\sqrt{1,\widehat{7}}$ b) $\sqrt{\frac{1,\widehat{3}}{3}}$

4 Indica cuál, de cada par de números, es mayor:

a) $\frac{140}{99}$ y $\sqrt{2}$ b) $0,52\widehat{6}$ y $0,\widehat{526}$

c) $4,\widehat{89}$ y $2\sqrt{6}$ d) $-2,098$ y $-2,1$

5 Observa cómo hemos representado algunos números irracionales:

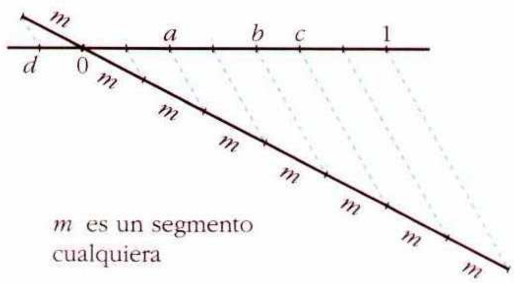


En el triángulo OAB, $\overline{OB} = 1$, $\overline{AB} = 1$ y $\overline{OA} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Por tanto, el punto D representa a $\sqrt{2}$.

¿Qué números representan los puntos F y H? Justifica tu respuesta.

6 ¿Cuáles son los números racionales a, b, c, d representados en este gráfico?



Potencias

7 Halla sin calculadora: $\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{9}\right)^{-1} + 4$

8 Simplifica, utilizando las propiedades de las potencias:

a) $\frac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{9^3 \cdot 4^3 \cdot 5}$ b) $\frac{3^4 \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{5^{-1} \cdot 3^5}$

c) $\frac{15^2 \cdot 8^{-1}}{6^3 \cdot 10^2}$ d) $\frac{a^{-3}\, b^{-4}\, c^7}{a^{-5}\, b^2\, c^{-1}}$

☛ *Mira el problema resuelto número 2 c).*

9 Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario y simplifica:

a) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a}$ b) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

10 Resuelve, sin utilizar la calculadora:

a) $\sqrt[5]{32}$ b) $\sqrt[3]{343}$ c) $\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt{0,25}$ e) $\sqrt[3]{8^4}$ f) $\sqrt[3]{0,001}$

11 Expresa como una potencia de base 2:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $(-32)^{1/5}$ c) $(\sqrt[8]{2})^4$

12 Calcula utilizando potencias de base 2, 3 y 5:

a) $4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3$ b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{8}$

c) $\frac{(-5)^3\,(-8)^3\,(-9)^2}{15^2 \cdot 20^4}$ d) $\frac{(-30)^{-1} \cdot 15^2}{10^3}$

13 Expresa en forma de potencia, efectúa las operaciones y simplifica:

a) $\frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}}{a\sqrt{a}}$ b) $16^{1/4} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{4}}$

14 Justifica las igualdades que son verdaderas. Escribe el resultado correcto en las falsas:

a) $\frac{a^2 \cdot b^{-2}}{a^{-2} \cdot b^2} = 1$ b) $(3^{-2})^{-3} \left(\frac{1}{27}\right)^2 = 1$

c) $\frac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}} = \frac{8}{15}$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = \frac{80}{9}$

15 Demuestra, utilizando potencias, que:

a) $(0,125)^{1/3} = 2^{-1}$ b) $(0,25)^{-1/2} = 2$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Radicales

16 Introduce los factores dentro de cada raíz:

a) $2\sqrt[3]{3}$ b) $4\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ c) $\frac{2}{x}\sqrt{\frac{3x}{8}}$

d) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{25}{9}}$ e) $2\sqrt[4]{4}$ f) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

17 Saca de la raíz el factor que puedas:

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $4\sqrt{8}$ c) $\sqrt{1\,000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$ e) $\sqrt{\frac{125a^2}{16b}}$ f) $\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}$

g) $\sqrt{\frac{16}{a^3}}$ h) $\sqrt{4a^2+4}$ i) $\sqrt{\frac{a}{9}+\frac{a}{16}}$

18 Simplifica:

a) $\sqrt[6]{0{,}027}$ b) $\sqrt[8]{0{,}0016}$ c) $\sqrt[4]{1+\frac{9}{16}}$

19 Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{24}$ b) $\sqrt[6]{27}$ c) $\sqrt[3]{-108}$

d) $\sqrt[12]{64y^3}$ e) $\sqrt[4]{\frac{81}{64}}$ f) $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$

20 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor:

a) $\sqrt[4]{4}, \sqrt[3]{3}, \sqrt{2}$ b) $\sqrt{6}, \sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{6}, \sqrt[5]{10}$ d) $\sqrt[4]{72}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[6]{100}$

21 Realiza la operación y simplifica, si es posible:

a) $4\sqrt{27}\cdot 5\sqrt{6}$ b) $2\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt{\frac{27}{8}}$ c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}$

d) $(\sqrt[3]{12})^2$ e) $(\sqrt[6]{32})^3$ f) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

22 Efectúa y simplifica, si es posible:

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a}}\cdot\sqrt{a}$

c) $\left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ d) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} : \sqrt{\sqrt[3]{4}}$

En b) y c) puedes expresar los radicales como potencias de bases a y 2, respectivamente.

23 Expresa con una única raíz:

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$ b) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$ c) $(\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}) : \sqrt{a}$

24 Racionaliza los denominadores y simplifica:

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$ b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{3}{3+\sqrt{3}}$ e) $\frac{\sqrt{72}+3\sqrt{32}-\sqrt{8}}{\sqrt{8}}$

25 Calcula y simplifica:

a) $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\frac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}-\frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $\sqrt{125}+\sqrt{54}-\sqrt{45}-\sqrt{24}$

d) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-1)$

26 Simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $3\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{250}+5\sqrt[3]{54}-4\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}}-4\sqrt{\frac{18}{125}}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{45}}$

c) $7\sqrt[3]{81a}-2\sqrt[3]{3a^4}+\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

27 Efectúa y simplifica:

a) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

b) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})2\sqrt{2}$ c) $(\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{5}+\sqrt{6})$

d) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2$ e) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\sqrt{3}$

28 Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ c) $\frac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$ e) $\frac{11}{2\sqrt{5}+3}$ f) $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

29 Efectúa y simplifica:

a) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

Notación científica y errores

30 Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

a) $\dfrac{(3{,}12 \cdot 10^{-5} + 7{,}03 \cdot 10^{-4})\, 8{,}3 \cdot 10^{8}}{4{,}32 \cdot 10^{3}}$

b) $\dfrac{(12{,}5 \cdot 10^{7} - 8 \cdot 10^{9})(3{,}5 \cdot 10^{-5} + 185)}{9{,}2 \cdot 10^{6}}$

c) $\dfrac{5{,}431 \cdot 10^{3} - 6{,}51 \cdot 10^{4} + 385 \cdot 10^{2}}{8{,}2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}$

31 Ordena de mayor a menor los números de cada apartado. Para ello, pasa a notación científica los que no lo estén:

a) $3{,}27 \cdot 10^{13}$; $85{,}7 \cdot 10^{12}$; $453 \cdot 10^{11}$

b) $1{,}19 \cdot 10^{-9}$; $0{,}05 \cdot 10^{-7}$; $2\,000 \cdot 10^{-12}$

32 Efectúa: $\dfrac{2 \cdot 10^{-7} - 3 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{6} + 10^{5}}$

33 Expresa en notación científica y calcula:

$$\frac{60\,000^3 \cdot 0{,}00002^4}{100^2 \cdot 72\,000\,000 \cdot 0{,}0002^5}$$

34 Considera los números:

$A = 3{,}2 \cdot 10^{7}$; $B = 5{,}28 \cdot 10^{4}$ y $C = 2{,}01 \cdot 10^{5}$

Calcula $\dfrac{B + C}{A}$. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

35 Si $A = 3{,}24 \cdot 10^{6}$; $B = 5{,}1 \cdot 10^{-5}$; $C = 3{,}8 \cdot 10^{11}$ y $D = 6{,}2 \cdot 10^{-6}$, calcula $\left(\dfrac{A}{B} + C\right) \cdot D$. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

Intervalos y valor absoluto

36 Expresa como desigualdad y como intervalo, y represéntalos:

a) x es menor que -5.

b) 3 es menor o igual que x.

c) x está comprendido entre -5 y 1.

d) x está entre -2 y 0, ambos incluidos.

37 Representa gráficamente y expresa como intervalos estas desigualdades:

a) $-3 \le x \le 2$ b) $5 < x$ c) $x \ge -2$

d) $-2 \le x < 3/2$ e) $4 < x < 4{,}1$ f) $-3 \le x$

38 Escribe la desigualdad que verifica todo número x que pertenece a estos intervalos:

a) $[-2, 7]$ b) $[13, +\infty)$ c) $(-\infty, 0)$

d) $(-3, 0]$ e) $[3/2, 6)$ f) $(0, +\infty)$

39 Expresa como intervalo la parte común de cada pareja de intervalos $(A \cap B)$ e $(I \cap J)$:

a) $A = [-3, 2]$ $B = [0, 5]$

b) $I = [2, +\infty)$ $J = (0, 10)$

40 Escribe en forma de intervalos los números que verifican estas desigualdades:

a) $x < 3$ o $x \ge 5$ b) $x > 0$ y $x < 4$

c) $x \le -1$ o $x > 1$ d) $x < 3$ y $x \ge -2$

☛ *Represéntalos gráficamente, y si son dos intervalos separados, como en a), escribe: $(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$*

41 Expresa, en forma de intervalo, los números que cumplen cada una de estas expresiones:

a) $|x| < 7$ b) $|x| \ge 5$ c) $|2x| < 8$

d) $|x - 1| \le 6$ e) $|x + 2| > 9$ f) $|x - 5| \ge 1$

42 Averigua qué valores de x cumplen:

a) $|x - 2| = 5$ b) $|x - 4| \le 7$ c) $|x + 3| \ge 6$

43 Escribe, mediante intervalos, los valores que puede tener x para que se pueda calcular la raíz en cada caso:

a) $\sqrt{x - 4}$ b) $\sqrt{2x + 1}$ c) $\sqrt{-x}$

d) $\sqrt{3 - 2x}$ e) $\sqrt{-x - 1}$ f) $\sqrt{1 + \dfrac{x}{2}}$

44 Halla la distancia entre los siguientes pares de números:

a) 7 y 3 b) 5 y 11 c) -3 y -9 d) -3 y 4

45 Expresa como un único intervalo:

a) $(1, 6] \cup [2, 5)$ b) $[-1, 3) \cup (0, 3]$

c) $(1, 6] \cap [2, 7)$ d) $[-1, 3) \cap (0, 4)$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

46 Escribe en forma de intervalo los siguientes entornos:

a) Centro -1 y radio 2

b) Centro 2,5 y radio 2,01

c) Centro 2 y radio 1/3

47 Describe como entornos los siguientes intervalos:

a) $(-1, 2)$ b) $(1{,}3;\ 2{,}9)$

c) $(-2{,}2;\ 0{,}2)$ d) $(-4;\ -2{,}8)$

48 Comprueba si es verdadera o falsa cada una de las siguientes expresiones:

a) $|a| < b$ equivale a $-b < a < b$

b) $|-a| = -|a|$ c) $|a + b| = |a| + |b|$

d) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Logaritmos

49 Calcula:

a) $log_2 1\,024$ b) $log\ 0{,}001$ c) $log_2 \frac{1}{64}$

d) $log_{\sqrt{3}} 3$ e) $log_3 \sqrt{3}$ f) $log_2 \sqrt{8}$

g) $log_{1/2} \frac{2}{\sqrt{2}}$ h) $log_\pi 1$

50 Calcula, utilizando la definición de logaritmo:

a) $log_2 64 + log_2 \frac{1}{4} - log_3 9 - log_2 \sqrt{2}$

b) $log_2 \frac{1}{32} + log_3 \frac{1}{27} - log_2 1$

51 Calcula la base de estos logaritmos:

a) $log_x 125 = 3$ b) $log_x \frac{1}{9} = -2$

52 Calcula el valor de x en estas igualdades:

a) $log\ 3^x = 2$ b) $log\ x^2 = -2$

c) $7^x = 115$ d) $5^{-x} = 3$

53 Halla con la calculadora y comprueba el resultado con la potenciación.

a) $log \sqrt{148}$ b) $ln\ (2{,}3 \cdot 10^{11})$ c) $ln\ (7{,}2 \cdot 10^{-5})$

d) $log_3 42{,}9$ e) $log_5 1{,}95$ f) $log_2 0{,}034$

54 Calcula la base de cada caso:

a) $log_x 1/4 = 2$ b) $log_x 2 = 1/2$

c) $log_x 0{,}04 = -2$ d) $log_x 4 = -1/2$

Aplica la definición de logaritmo y las propiedades de las potencias para despejar x.

En c), $x^{-2} = 0{,}04 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{4}{100}$.

55 Halla el valor de x en estas expresiones aplicando las propiedades de los logaritmos:

a) $ln\ x = ln\ 17 + ln\ 13$

b) $log\ x = log\ 36 - log\ 9$

c) $ln\ x = 3\ ln\ 5$

d) $log\ x = log\ 12 + log\ 25 - 2\ log\ 6$

e) $ln\ x = 4\ ln\ 2 - \frac{1}{2}\ ln\ 25$

a) Por logaritmo de un producto: $ln\ x = ln\ (17 \cdot 13)$

56 Sabiendo que $log\ 3 = 0{,}477$, calcula el logaritmo decimal de 30; 300; 3 000; 0,3; 0,03; 0,003.

57 Sabiendo que $log\ k = 14{,}4$, calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $log \frac{k}{100}$ b) $log\ 0{,}1\ k^2$

c) $log \sqrt[3]{\frac{1}{k}}$ d) $(log\ k)^{1/2}$

58 Sabiendo que $ln\ k = 0{,}45$, calcula el valor de:

a) $ln \frac{k}{e}$ b) $ln \sqrt[3]{k}$ c) $ln \frac{e^2}{k}$

59 Calcula x para que se cumpla:

a) $x^{2,7} = 19$ b) $log_7 3x = 0{,}5$ c) $3^{2+x} = 172$

60 Si $log\ k = x$, escribe en función de x:

a) $log\ k^2$ b) $log \frac{k}{100}$ c) $log \sqrt{10k}$

61 Comprueba que $\dfrac{log \frac{1}{a} + log \sqrt{a}}{log\ a^3} = -\frac{1}{6}$ (siendo $a \neq 1$).

CUESTIONES TEÓRICAS

62 Explica si estas frases son verdaderas o falsas:

a) Todo número entero es racional.

b) Hay números irracionales que son enteros.

c) Todo número irracional es real.

d) Todos los números decimales son racionales.

e) Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.

f) Los números racionales llenan la recta.

63 ¿Qué relación existe entre a y b en los siguientes casos?:

a) $\log a = 1 + \log b$ b) $\log a + \log \frac{1}{b} = 0$

64 ¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Explica por qué:

a) $\log m + \log n = \log (m + n)$

b) $\log m - \log n = \dfrac{\log m}{\log n}$

c) $\log m - \log n = \log \dfrac{m}{n}$

d) $\log x^2 = \log x + \log x$

e) $\log (a^2 - b^2) = \log (a + b) + \log (a - b)$

PARA PROFUNDIZAR

65 Si $n \neq 0$ es natural, determina para qué valores de n estos números pertenecen a $\mathbb{Z}$:

a) $\dfrac{n}{2}$ b) $\dfrac{3}{n}$ c) $n - 5$ d) $n + \dfrac{1}{2}$ e) $\sqrt{n}$

66 Di cuál es la parte entera de los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

a) $\log 348$ b) $\log_2 58$ c) $\log 0{,}03$

67 Sean m y n dos números racionales. ¿Qué puedes decir del signo de m y n en cada uno de estos casos?

a) $m \cdot n > 0$ y $m + n < 0$

b) $m \cdot n < 0$ y $m - n > 0$

c) $m \cdot n < 0$ y $m - n < 0$

68 Si $x \in \mathbb{N}$ y $x > 1$, ordena estos números:

$$\frac{1}{x+1} \; ; \; x \; ; \; \frac{1}{x} \; ; \; -\frac{1}{x} \; ; \; \frac{1}{-x-1}$$

69 Ordena de menor a mayor los números a, a^2, $\dfrac{1}{a}$, $\sqrt{a}$, si $a > 1$ y si $0 < a < 1$.

AUTOEVALUACIÓN

1. Dados los números:

$$-\frac{58}{45};\ \frac{51}{17};\ \frac{\pi}{3};\ \sqrt[4]{-3};\ \sqrt[3]{-8};\ \sqrt[5]{2^3};\ 1{,}0\widehat{7}$$

a) Clasifícalos indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ pertenecen.

b) Ordena de menor a mayor los reales.

c) ¿Cuáles de ellos pertenecen al intervalo $(-2, 11/9]$?

2. Representa los siguientes conjuntos:

a) $\{x / -3 \le x < 1\}$ b) $[4, +\infty)$

c) $[-1, 4) \cup (4, 10]$ d) $(-\infty, 5) \cap (-1, +\infty)$

3. Expresa en forma de intervalo en cada caso:

a) $|x| \ge 8$ b) $|x - 4| < 5$

4. Multiplica y simplifica: $\sqrt[3]{9a^2b} \cdot \sqrt[6]{18a^3b^2}$

5. Reduce: $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2}$

6. Escribe como potencia y simplifica.

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^{12}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}\right) : \left(a\sqrt[4]{a^{-2}}\right)$$

7. Efectúa, racionalizando previamente.

$$\frac{4 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \frac{2}{3 - \sqrt{3}}$$

8. Aplica la definición de logaritmo y obtén x:

a) $\log_3 x = -\dfrac{1}{4}$ b) $\ln \dfrac{x}{3} = -1$ c) $\log_x 125 = 3$

9. Aplica las propiedades de los logaritmos y halla A.

$$\log A = 2 \log 3 + 0{,}5 \log 4 - 3 \log 2$$

10. Calcula x en cada caso.

a) $2{,}5^x = 0{,}0087$ b) $e^{-x} = 425$

4. En tu CD tienes las resoluciones de todos estos ejercicios.